Prozessfähigkeit bei technisch begrenzten Merkmalen

Fähigkeitskennzahlen und Berechnungsmethoden

Barbara Bredner

27.01.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Prozessfähigkeit und technische Grenzen

1.1 Fähigkeitskennzahlen

Der Prozessfähigkeits-Index C_p berechnet sich bei normalverteilten Messdaten aus dem Vergleich der Toleranzbreite zur Streubreite eines Prozesses:

$$C_p = \frac{OSG - USG}{6 \cdot \sigma} = \frac{TB}{6 \cdot \sigma} \tag{1}$$

mit OSGobere Spezifikationsgrenze, USGuntere Spezifikationsgrenze und σ Standardabweichung (s. Formel 7) und TB Toleranzbreite (s. Formel 2). *Anmerkung: Beim C_p-Wert wird ausschließlich die Streuung berücksichtigt, nicht die mittlere Lage eines Prozesses.*

Der Abstand zwischen OSGund USGwird auch als Toleranzbreite TB bezeichnet:

$$TB = OSG - USG \tag{2}$$

Der Prozessfähigkeits-Index C_{pk} verwendet zur Beurteilung eines Prozesses die Streuung und den Mittelwert. Er wird angegeben als kleinerer von zwei Werten C_{pku} und C_{pko}, die jeder für sich die Einhaltung der Toleranzgrenzen auf jeweils einer Seite vom Mittelwert aus gesehen bewerten:

$$C_{pku} = \frac{\mu - USG}{3 \cdot \sigma} \tag{3}$$

$$C_{pko} = \frac{OSG - \mu}{3 \cdot \sigma} \tag{4}$$

$$C_{pk} = \min\{C_{pku}, C_{pko}\} \tag{5}$$

mit OSGobere Spezifikationsgrenze, USGuntere Spezifikationsgrenze, μ Mittelwert und σ Standardabweichung (vgl. Formeln 6 und 7).

Der „echte" oder tatsächliche Mittelwert μ und die „echte" Standardabweichung σ eines Prozesses sind meistens unbekannt. Werte für die mittlere Lage und die Streuung werden daher aus den Messdaten berechnet (= in Statistik-Sprache „geschätzt" bzw. im Englischen „estimated"), und zwar über folgende Formeln

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{6}$$

$$\hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{7}$$

Das Dach ˆ über den griechischen Buchstaben signalisiert dabei, dass die Kenngrößen für den Prozess aus Messdaten berechnet wurden und damit nicht absolut richtig sind, sondern eine gute Näherung an die echten Prozesskenngrößen μ und σ darstellen.

1.1.1 Woher kommt das k im C_{pk}-Prozessfähigkeitsindex?

Das k im C_{pk}-Fähigkeitsindex (genauso wie in C_{gk} und P_{pk}) stammt vermutlich aus dem Japanischen, und zwar als Abkürzung des Wortes „katayori“ (japanisch für „Mitte“). Die japanische Abstammung ist wahrscheinlich, da die Prozessfähigkeits-Indizes um 1970 in Japan entwickelt wurden.

Daran beteiligt war u. a. Taguchi Genichi, der eine neue Sichtweise der Qualität beschrieb: Nach Taguchi ist jede Abweichung vom Zielwert ein Qualitätsverlust, auch wenn der Wert selbst innerhalb der Toleranz liegt. Optimal ist ein Prozess dann, wenn möglichst wenig Abweichungen im Prozess auftreten, d. h. wenn der Prozess zentriert mit geringer Streuung ist. Diese Definition von optimalen Prozessen findet sich in der Bewertung über Fähigkeits-Kennzahlen wieder, denn diese werden dann groß, wenn die Streuung des Prozesses klein im Vergleich zur Toleranz ist und die Prozesslage nahe bzw. auf dem optimalen Wert (Zielwert) ist.

Im deutschsprachigen Raum wurde k teilweise mit „kritisch“ angegeben. Diese Interpretation hat keine historische Begründung, da statistische Methoden in der Industrie zum Zeitpunkt der Entwicklung der Prozessfähigkeits-Indizes um 1970 nur eine sehr untergeordnete Rolle spielten.

1.1.2 C_p ist immer größer oder gleich C_{pk}: $C_p \geq C_{pk}$

Der Fähigkeitswert C_{pk} berücksichtigt sowohl die Streubreite als auch die Lage eines Prozesses, während der Fähigkeitswert C_{pk} ausschließlich die Streubreite zur Bewertung heranzieht. Damit ist der C_{pk}-Index schärfer als der C_p-Index und somit logischerweise höchstens genauso groß wie der C_p-Wert und meistens kleiner.

Die beiden Indizes C_p und C_{pk} sind gleich, wenn der Prozess optimal zentriert ist, andernfalls ist C_{pk} immer kleiner als C_p:

$$C_p \geq C_{pk} \tag{8}$$

Die Ungleichung 8 lässt sich auch mathematisch beweisen:

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{OSG - USG}{6 \cdot \sigma} = \frac{OSG \overbrace{(-\mu + \mu)}^{=0} - USG}{2 \cdot 3\sigma} = \frac{1}{2} \frac{(OSG - \mu) + (\mu - USG)}{3\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(OSG - \mu)}{3\sigma} + \frac{(\mu - USG)}{3\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(C_{pku} + C_{pko}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

OSGobere Spezifikationsgrenze, USGuntere Spezifikationsgrenze, μ Mittelwert und σ Standardabweichung (s. Formeln 6 und 7).

C_{pk} ist definiert als kleinerer der beiden Werte C_{pku} und C_{pko} (vgl. Formel 5). Wenn C_{pko} der kleinere der beiden C_{pk}-Anteile C_{pku} und C_{pko} ist, dann folgt daraus:

$$\begin{aligned} C_{pk} &= C_{pko} && (10) \\ \Leftrightarrow C_{pko} &< C_{pku} \\ \Leftrightarrow C_{pko} + \underbrace{d}_{d>0} &= C_{pku} && (11) \\ \Leftrightarrow C_{pk} + d &= C_{pku} && (12) \end{aligned}$$

Damit lässt sich das Ergebnis aus Formel 9 umformen zu:

$$
\begin{aligned}
C_p &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{C_{pku}}_{(12)\,=C_{pk}+d} + \underbrace{C_{pko}}_{(10)\,=C_{pk}}\right) = \frac{1}{2}\left((C_{pk}+d)+C_{pk}\right) = \frac{1}{2}\left(2\cdot C_{pk}\right)+\frac{1}{2}d \\
&= C_{pk} + \underbrace{d}_{(11)\,>0} > C_{pk} \\
\Leftrightarrow C_p &> C_{pk} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Ist der untere Anteil C_{pku} kleiner als C_{pko}, gilt die Ungleichung 13 ebenfalls. Dies kann gezeigt werden, indem in Formel 10 $C_{pk} = C_{pku}$ eingesetzt wird.

$C_p = C_{pk}$ gilt genau dann, wenn $C_{pku} = C_{pko}$ ist (s. Formel 9), d. h. wenn der Prozess exakt in der Mitte der Toleranz zentriert ist:

$$
\begin{aligned}
C_{pku} &= C_{pko} \\
\Leftrightarrow \frac{\mu - USG}{3\cdot\sigma} &= \frac{OSG-\mu}{3\cdot\sigma} \\
\Leftrightarrow \mu - USG &= OSG - \mu \\
\Leftrightarrow 2\cdot\mu &= OSG + USG \\
\Leftrightarrow \mu &= \frac{OSG+USG}{2}
\end{aligned}
$$

1.2 Fähigkeitsbewertung bei einseitiger Toleranz

Ist für ein Merkmal nur ein zu hoher oder zu niedriger Wert ungünstig, wird das Merkmal nur auf einer Seite toleriert bzw. die Toleranzgrenze auf der anderen Seite ist unendlich klein oder groß ($-\infty$ oder $+\infty$). Damit kann dann keine informative Toleranzbreite als Abstand zwischen oberer und unterer Spezifikationsgrenze mehr berechnet werden, denn es gilt für einseitig tolerierte Merkmale:

$$TB = OSG - USG = OSG - (-\infty) = OSG + \infty = \infty \qquad (14)$$

bei einseitiger oberer Spezifikationsgrenze OSG und entsprechend

$$TB = +\infty - USG = \infty \qquad (15)$$

bei einseitiger unterer Spezifikationsgrenze USG.

Damit wird der C_p-Index unendlich groß, da im Zähler die Toleranzbreite $TB = \infty$ steht (vgl. Formel 1). Egal wie groß die Standardabweichung s eines Prozesses ist, unendlich durch eine feste Zahl geteilt ist immer noch unendlich. Aus diesem Grund wird auf die Angabe eines C_p-Wertes bei Merkmalen mit einseitiger Spezifikationsgrenze verzichtet.

1.3 Fähigkeitsbewertung bei einseitiger Toleranz und technischer Grenze

Hat ein Merkmal nur auf einer Seite eine Spezifikationsgrenze und ist auf der anderen Seite durch eine technische Grenze beschränkt, kann wie in Abschnitt 1.2 beschrieben keine Toleranzbreite angegeben werden. Mathematisch bleibt die nicht-gesetzte Spezifikationsgrenze bei $+\infty$ bzw. $-\infty$, auch wenn die technische Grenze ein fester Wert ist (s. Beispiel in Abschnitt 2).

Bei einseitiger Toleranz kann immer nur der C_{pk}-Index berechnet werden, unabhängig davon, ob eine technische Grenze vorhanden ist oder nicht.

2 Beispiel: Fähigkeitsbewertung Rauhigkeit

In einem Prozess wird die Rauhigkeit von Oberflächen bestimmt. Abbildung 1 zeigt das Histogramm der aufgenommenen 100 Messdaten. *(Anmerkung: Diese Messdaten folgen einer Normalverteilung. Auf den Nachweis wird an dieser Stelle verzichtet.)*

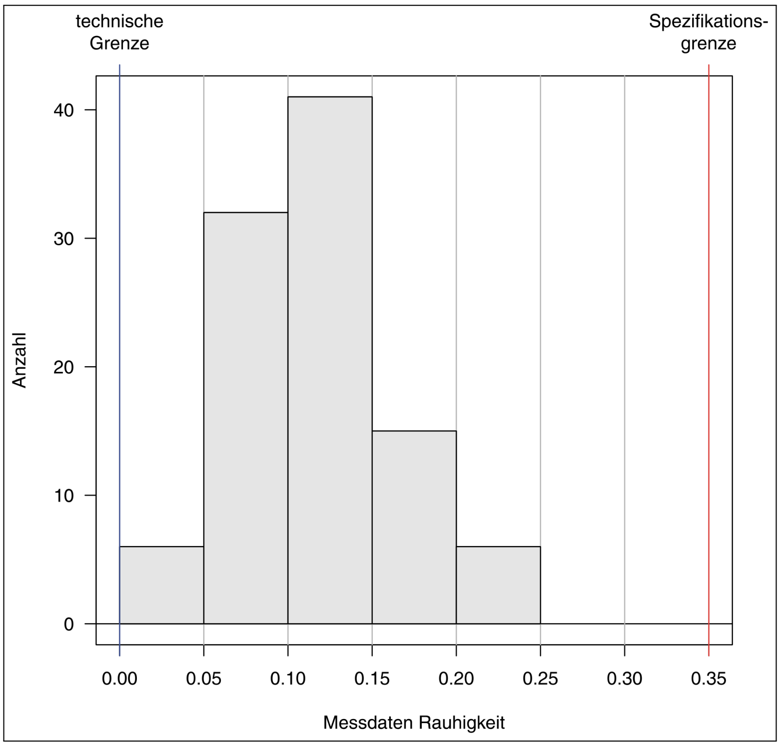

Abbildung 1: Histogramm Rauhigkeit mit technischer Grenze 0 und Spezifikationsgrenze $OSG = 0,35$

Ein Merkmal wie Rauhigkeit ist technisch nach unten durch 0 begrenzt, allerdings ist ein möglichst kleiner Wert für die Rauhigkeit oft erwünscht. Insofern sieht das Histogramm in Abbildung 1 sehr gut aus: Es sind wenig oder keine zu großen Werte (Werte $> 0,35 = OSG$) zu erwarten, die Messdaten streuen wenig und der Mittelwert liegt nahe am optimalen Wert 0.

Mit den üblichen Formeln für die Prozess-Mitte (arithmetischer Mittelwert der Messdaten, vgl. Formel 6, S. 3) und Prozess-Streuung (Standardabweichung der Messdaten, vgl. Formel 7, S. 3) ergeben sich folgende Kennzahlen für die Rauhigkeits-Messdaten:

$$\hat{\mu} \; = \; \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \; = \; 0,116288 \tag{16}$$

$$\hat{\sigma} \; = \; s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \; = \; 0,045429 \tag{17}$$

Der Prozess-Mittelwert ist also $\bar{x} = 0,116288$ und die Prozess-Streuung ist $s = 0,045429$.

2.1 Falscher Ansatz zur Berechnung der Prozessfähigkeit

Vor allem in der Software qs-stat (Q-Das GmbH) sowie in den Büchern, die die Herausgeber dieser Software Edgar Dietrich (Geschäftsführer Q-Das GmbH) und Alfred Schulze (ehemaliger Geschäftsführer Q-Das GmbH) geschrieben haben, finden sich Beispiele in denen bei einseitiger Spezifikation und einer technischen Grenze die Prozessfähigkeits-Kennzahl C_p berechnet wird.

Der Ansatz in diesem Abschnitt 2.1 ist mathematisch falsch und wird hier nur beschrieben, um die in anderen Veröffentlichungen angegebenen Kennzahlen nachvollziehen zu können. Die mathematisch korrekte Berechnungsmethode, die auch aus technischer Sicht nachvollziehbare Ergebnisse liefert, findet sich in Abschnitt 2.2.

Für die Berechnung des Prozessfähigkeits-Indizes C_p wird die Toleranzbreite verwendet. Der Toleranzbereich wird durch zwei Toleranzgrenzen vorgegeben, außerhalb derer unerwünschte Werte liegen. In dem hier verwendeten Beispiel mit den Rauhigkeitsmessdaten gibt es lediglich eine obere Toleranzgrenze OSG.

Um dennoch eine Art Toleranzbreite vorzugeben, wird die technische Grenze gleich der unteren Toleranzgrenze gesetzt (und **dieser Schritt ist entscheidend und falsch**):

$$TeG = USG$$

mit TeG technische Grenze und USG untere Spezifikationsgrenze.

Damit berechnet sich (scheinbar) der C_p-Index nach Formel 1 (S. 3) mit $\hat{\sigma} = 0,045429$, $OSG = 0,35$ und $TeG = 0$ zu:

$$C_p^* = \frac{OSG - USG}{6 \cdot \sigma} = \frac{OSG - TeG}{6 \cdot \sigma} = \frac{0,35 - 0}{6 \cdot 0,045429} = \frac{0,35}{0,272577} = 1,284042$$

Der Wert des Fähigkeits-Indizes C_p^* ist mit $1,28$ für viele praktische Anwendungen zu niedrig (häufige Forderung: $C_p > 1,33$ oder $C_p > 1,67$). Zudem ist er falsch, weil eine technische Grenze keine Toleranzgrenze ist: $TeG \neq USG$.

Aus einem C_p-Wert lässt sich die zu erwartende Anzahl Teile außerhalb der Toleranz, der ppm-Wert berechnen (ppm: parts per million). Für $C_p^* = 1,28$ ergibt sich ein ppm-Wert von $ppm = 117,10$. Dieser Wert erscheint sehr hoch zu sein im Vergleich zur Verteilungsform der Messdaten in Abbildung 1.

Denn der Abstand zwischen dem größten aufgenommenen Rauhigkeits-Messwert ($x_{max} = 0,2390$) und der oberen Toleranzgrenze $OSG = 0,35$ groß: $OSG - x_{max} = 0,1110 = 2,44s$. Bei $n = 100$ Messwerten und einem ppm-Wert von $117,10$ müsste die Toleranzgrenze dichter an den Messdaten liegen, damit Werte außerhalb der Toleranz (hier über $OSG = 0,35$) wahrscheinlicher sind.

2.2 Richtige Methode zur Berechnung der Prozessfähigkeit

Bei einem einseitig tolerierten Merkmal wird die Prozessfähigkeit (ausschließlich) über den C_{pk}-Fähigkeitswert angegeben. Für die Rauhigkeits-Messdaten ist der Prozess-Mittelwert $\bar{x} = 0,116288$ und die Prozess-Streuung $s = 0,045429$.

Nach Formeln 3-5 (S. 3) berechnet sich der C_{pk}-Wert wie nachfolgend beschrieben. Dabei wird berücksichtigt, dass eine technische Grenze keine Toleranzgrenze ist, sondern für die einseitig tolerierten Rauhigkeits-Messdaten gilt: $USG = -\infty$ (vgl. Abschnitt 1.2, S. 5).

Der Prozessfähigkeits-Wert C_{pk} für die Rauhigkeits-Messwerte berechnet sich damit zu:

$$C_{pku} = \frac{\mu - USG}{3 \cdot \sigma} = \frac{0,116288 - (-\infty)}{3 \cdot 0,045429} = +\infty$$

$$C_{pko} = \frac{OSG - \mu}{3 \cdot \sigma} = \frac{0,35 - 0,116288}{3 \cdot 0,045429} = \frac{0,233712}{0,136288} = 1,714832$$

$$C_{pk} = \min\{C_{pku}\,,\, C_{pko}\} = \min\{+\infty\,,\, 1,714832\} = 1,714832$$

Die Prozessfähigkeit für die Rauhigkeit ist damit $C_{pk} = 1,71$.

Verglichen mit der (falschen) Prozessfähigkeit $C_p^* = 1,28$ aus Abschnitt 2.1 bewertet die Fähigkeits-Kennzahl C_{pk} den Prozess mit $C_{pk} = 1,71$ deutlich besser.

Der ppm-Wert kann aus Mittelwert $\bar{x}$, Standardabweichung s und oberer Spezifikationsgrenze OSG aus der Normalverteilung berechnet werden. Hier ergibt sich für die Rauhigkeits-Messdaten ein Wert von $ppm = 0,13$, der zu der Verteilung der Messdaten sehr viel besser passt als der mit dem C_p^* aus Abschnitt 2.1 berechnete Wert von $ppm = 117,10$ (vgl. Abbildung 1).

Die Verwendung der technischen Grenze anstelle der unteren Toleranzgrenze führt in diesem Beispiel zu einer deutlichen Unterschätzung der tatsächlichen Prozessfähigkeit und damit auch zu einer starken Überschätzung der ppm-Rate.

Literatur

[1] DIN ISO 21747:2006 [2006]: *Statistische Verfahren - Prozessleistungs- und Prozessfähigkeitskenngrößen für kontinuierliche Qualitätsmerkmale*
Beuth Verlag

[2] Dietrich, Edgar; Schulze, Alfred; Conrad, Stephan [2009]: *Abnahme von Fertigungseinrichtungen*
Hanser Fachbuch, 3. Auflage, ISBN 978-3446420533

Autor

Barbara Bredner
Statistische Beratung und Lösungen
Carl-Zuckmayer-Str. 19
D-59427 Unna
E-Mail: info@bb-sbl.de
Web: www.bb-sbl.de

Stand: 27.01.2011